

Основні формули тригонометрії

Короткий шкільний довідник

Одиничне коло, тотожності, перетворення та тригонометричні рівняння

1. Градуси та радіани

Повний оберт:

$$360^\circ = 2\pi \text{ рад.}$$

Півоберт:

$$180^\circ = \pi \text{ рад.}$$

Переведення градусів у радіани:

$$\alpha_{\text{рад}} = \alpha_{\text{град}} \cdot \frac{\pi}{180^\circ}.$$

Переведення радіанів у градуси:

$$\alpha_{\text{град}} = \alpha_{\text{рад}} \cdot \frac{180^\circ}{\pi}.$$

2. Означення тригонометричних функцій

На одиничному колі точка, що відповідає куту α , має координати

$$(\cos \alpha, \sin \alpha).$$

Тангенс:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \cos \alpha \neq 0.$$

Котангенс:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \sin \alpha \neq 0.$$

3. Основні значення

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	не існує
$\operatorname{ctg} \alpha$	не існує	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

4. Основні тригонометричні тотожності

Основна тригонометрична тотожність:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Зв'язок тангенса з косинусом:

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad \cos \alpha \neq 0.$$

Зв'язок котангенса із синусом:

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \quad \sin \alpha \neq 0.$$

Зв'язок тангенса і котангенса:

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1,$$

якщо обидві функції визначені.

5. Парність і періодичність

Синус, тангенс і котангенс є непарними функціями:

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha,$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha,$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha.$$

Косинус є парною функцією:

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha.$$

Період синуса і косинуса дорівнює 2π :

$$\sin(\alpha + 2\pi k) = \sin \alpha,$$

$$\cos(\alpha + 2\pi k) = \cos \alpha.$$

Період тангенса і котангенса дорівнює π :

$$\operatorname{tg}(\alpha + \pi k) = \operatorname{tg} \alpha,$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \pi k) = \operatorname{ctg} \alpha, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

6. Знаки функцій за чвертями

Чверть	I	II	III	IV
$\sin \alpha$	+	+	−	−
$\cos \alpha$	+	−	−	+
$\operatorname{tg} \alpha$	+	−	+	−
$\operatorname{ctg} \alpha$	+	−	+	−

7. Формули додавання

Синус суми:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

Синус різниці:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta.$$

Косинус суми:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

Косинус різниці:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

Тангенс суми:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.$$

Тангенс різниці:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.$$

Формули застосовують за допустимих значень усіх виразів, що входять до них.

8. Формули подвійного кута

Синус подвійного кута:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

Косинус подвійного кута:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.$$

Також:

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1,$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha.$$

Тангенс подвійного кута:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha},$$

якщо обидві частини формули визначені.

9. Формули половинного кута

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}.$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}.$$

Під час добування квадратного кореня знак обирають за чвертю, у якій розташований кут $\frac{\alpha}{2}$:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}.$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}.$$

Тангенс половинного кута:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}.$$

Також:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Формули застосовують за умови, що знаменники не дорівнюють нулю.

10. Сума і різниця функцій

Сума синусів:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Різниця синусів:

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Сума косинусів:

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Різниця косинусів:

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

11. Перетворення добутку на суму

$$2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta).$$

$$2 \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta).$$

$$2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta).$$

$$2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta).$$

12. Формули зведення

Якщо кут містить

$$\frac{\pi}{2} \pm \alpha \quad \text{або} \quad \frac{3\pi}{2} \pm \alpha,$$

назва функції змінюється на кофункцію:

$$\sin \longleftrightarrow \cos, \quad \operatorname{tg} \longleftrightarrow \operatorname{ctg}.$$

Якщо кут містить

$$\pi \pm \alpha \quad \text{або} \quad 2\pi \pm \alpha,$$

назва функції зберігається.

Знак результату визначають за чвертю, у якій розташований початковий кут.

Приклади:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha.$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha.$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha.$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha.$$

$$\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha.$$

$$\operatorname{ctg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha.$$

13. Обернені тригонометричні функції

Арксинус:

$$y = \arcsin x \quad \Longleftrightarrow \quad \sin y = x,$$

$$-1 \leq x \leq 1, \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$$

Арккосинус:

$$y = \arccos x \quad \Longleftrightarrow \quad \cos y = x,$$

$$-1 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq \pi.$$

Арктангенс:

$$y = \operatorname{arctg} x \iff \operatorname{tg} y = x,$$

$$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}.$$

Арккотангенс:

$$y = \operatorname{arcctg} x \iff \operatorname{ctg} y = x,$$

$$0 < y < \pi.$$

14. Найпростіші тригонометричні рівняння

Рівняння

$$\sin x = a$$

має дійсні розв'язки лише за умови

$$|a| \leq 1.$$

Загальний розв'язок:

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Рівняння

$$\cos x = a$$

має дійсні розв'язки лише за умови

$$|a| \leq 1.$$

Загальний розв'язок:

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Рівняння

$$\operatorname{tg} x = a$$

має розв'язок:

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Рівняння

$$\operatorname{ctg} x = a$$

має розв'язок:

$$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Окремі випадки:

$$\sin x = 0 \implies x = \pi n.$$

$$\cos x = 0 \implies x = \frac{\pi}{2} + \pi n.$$

$$\operatorname{tg} x = 0 \implies x = \pi n.$$

$$\operatorname{ctg} x = 0 \implies x = \frac{\pi}{2} + \pi n.$$

15. Універсальна тригонометрична підстановка

Вводимо нову змінну:

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

Тоді:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}.$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2}.$$

Також:

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1-t^2}{2t}.$$

Підстановку застосовують для перетворення раціональних виразів від

$$\sin x \text{ і } \cos x$$

на раціональні вирази від змінної t .

Під час використання підстановки необхідно окремо перевіряти значення

$$x = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

оскільки для них величина $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ не визначена.

Перед відповіддю

Перевірте:

- в яких одиницях задано кут — у градусах чи радіанах;
- область допустимих значень;
- знаки функцій за чвертями;
- період функції;
- чи належать усі знайдені розв'язки заданому проміжку.

Пам'ятка призначена для швидкого повторення. Перед застосуванням формули перевіряйте область допустимих значень та одиниці вимірювання кутів.

© ФизикусЪ, Денис Лаптев