

Základné trigonometrické vzorce

Stručný školský prehľad

Jednotková kružnica, identity, úpravy a trigonometrické rovnice

1. Stupne a radiány

Celý obrat:

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad.}$$

Polobrat:

$$180^\circ = \pi \text{ rad.}$$

Prevod stupňov na radiány:

$$\alpha_{\text{rad}} = \alpha_{\text{st}} \cdot \frac{\pi}{180}.$$

Prevod radiánov na stupne:

$$\alpha_{\text{st}} = \alpha_{\text{rad}} \cdot \frac{180}{\pi}.$$

2. Definície goniometrických funkcií

Na jednotkovej kružnici má bod prislúchajúci uhlu α súradnice

$$(\cos \alpha, \sin \alpha).$$

Tangens:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \cos \alpha \neq 0.$$

Kotangens:

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \sin \alpha \neq 0.$$

3. Základné hodnoty

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie je definovaný
$\cot \alpha$	nie je definovaný	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

4. Základné goniometrické identity

Základná goniometrická identita:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Vzťah medzi tangensom a kosínusom:

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad \cos \alpha \neq 0.$$

Vzťah medzi kotangensom a sínusom:

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \quad \sin \alpha \neq 0.$$

Vzťah medzi tangensom a kotangensom:

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1,$$

ak sú obe funkcie definované.

5. Párnosť a periodicita

Sínus, tangens a kotangens sú nepárne funkcie:

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha,$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha,$$

$$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha.$$

Kosínus je párna funkcia:

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha.$$

Periódá sínusu a kosínusu je 2π :

$$\sin(\alpha + 2\pi k) = \sin \alpha,$$

$$\cos(\alpha + 2\pi k) = \cos \alpha.$$

Periódá tangensu a kotangensu je π :

$$\tan(\alpha + \pi k) = \tan \alpha,$$

$$\cot(\alpha + \pi k) = \cot \alpha, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

6. Znamienka funkcií v kvadrantoch

Kvadrant	I	II	III	IV
$\sin \alpha$	+	+	−	−
$\cos \alpha$	+	−	−	+
$\tan \alpha$	+	−	+	−
$\cot \alpha$	+	−	+	−

7. Vzorce pre súčet a rozdiel uhlov

Sínus súčtu:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

Sínus rozdielu:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta.$$

Kosínus súčtu:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

Kosínus rozdielu:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

Tangens súčtu:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}.$$

Tangens rozdielu:

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}.$$

Vzorce platia vtedy, keď sú všetky výrazy, ktoré sa v nich nachádzajú, definované.

8. Vzorce pre dvojnásobný uhol

Sínus dvojnásobného uhla:

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

Kosínus dvojnásobného uhla:

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.$$

Ekvivalentné tvary:

$$\cos(2\alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1,$$

$$\cos(2\alpha) = 1 - 2 \sin^2 \alpha.$$

Tangens dvojnásobného uhla:

$$\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha},$$

ak sú obe strany vzorca definované.

9. Vzorce pre polovičný uhol

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}.$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}.$$

Pri odmocňovaní vyberáme znamienko podľa kvadrantu, v ktorom sa nachádza uhol $\frac{\alpha}{2}$:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}.$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}.$$

Tangens polovičného uhla:

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}.$$

Tiež:

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Vzorce používame iba vtedy, keď ich menovatele nie sú rovné nule.

10. Vzorce pre súčet a rozdiel funkcií

Súčet sínusov:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Rozdiel sínusov:

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Súčet kosínusov:

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Rozdiel kosínusov:

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

11. Prevod súčinu na súčet

$$2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta).$$

$$2 \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta).$$

$$2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta).$$

$$2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta).$$

12. Redukčné vzorce

Ak uhol obsahuje

$$\frac{\pi}{2} \pm \alpha \quad \text{alebo} \quad \frac{3\pi}{2} \pm \alpha,$$

funkcia sa zamení za príslušnú funkciu:

$$\sin \longleftrightarrow \cos, \quad \tan \longleftrightarrow \cot.$$

Ak uhol obsahuje

$$\pi \pm \alpha \quad \text{alebo} \quad 2\pi \pm \alpha,$$

názov funkcie sa nemení.

Znamienko výsledku určíme podľa kvadrantu, v ktorom sa nachádza pôvodný uhol.

Príklady:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha.$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha.$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha.$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha.$$

$$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha.$$

$$\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha.$$

13. Inverzné goniometrické funkcie

Arkussínus:

$$y = \arcsin x \quad \Longleftrightarrow \quad \sin y = x,$$

$$-1 \leq x \leq 1, \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$$

Arkuskosínus:

$$y = \arccos x \quad \Longleftrightarrow \quad \cos y = x,$$

$$-1 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq \pi.$$

Arkustangens:

$$y = \arctan x \quad \Longleftrightarrow \quad \tan y = x,$$

$$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}.$$

Arkuskotangens pri zvolenej konvencii $0 < y < \pi$:

$$y = \operatorname{arccot} x \iff \cot y = x,$$

$$0 < y < \pi.$$

14. Základné trigonometrické rovnice

Rovnica

$$\sin x = a$$

má reálne riešenia iba vtedy, keď

$$|a| \leq 1.$$

Všeobecné riešenie:

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Rovnica

$$\cos x = a$$

má reálne riešenia iba vtedy, keď

$$|a| \leq 1.$$

Všeobecné riešenie:

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Rovnica

$$\tan x = a$$

má všeobecné riešenie:

$$x = \arctan a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Rovnica

$$\cot x = a$$

má všeobecné riešenie:

$$x = \operatorname{arccot} a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Osobitné prípady:

$$\sin x = 0 \implies x = \pi n.$$

$$\cos x = 0 \implies x = \frac{\pi}{2} + \pi n.$$

$$\tan x = 0 \implies x = \pi n.$$

$$\cot x = 0 \implies x = \frac{\pi}{2} + \pi n.$$

15. Univerzálna goniometrická substitúcia

Zavedieme novú premennú:

$$t = \tan \frac{x}{2}.$$

Potom:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}.$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

$$\tan x = \frac{2t}{1-t^2}.$$

Tiež:

$$\cot x = \frac{1-t^2}{2t}.$$

Substitúcia prevádza racionálne výrazy obsahujúce

$$\sin x \text{ a } \cos x$$

na racionálne výrazy v premennej t .

Pri použití substitúcie treba osobitne skontrolovať hodnoty

$$x = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

pretože pri týchto hodnotách výraz $\tan \frac{x}{2}$ nie je definovaný.

Pred odovzdaním výsledku

Skontrolujte:

- či je uhol vyjadrený v stupňoch alebo v radiánoch;
- definičný obor všetkých výrazov;
- znamienka funkcií v jednotlivých kvadrantoch;
- periódu príslušnej funkcie;
- či všetky nájdené riešenia patria do požadovaného intervalu.

Táto pomôcka je určená na rýchle opakovanie. Pred použitím vzorca skontrolujte definičný obor a jednotky, v ktorých sú uhly vyjadrené.

© ФизикусЪ, Denys Laptiev