

Основные формулы тригонометрии

Краткий школьный справочник

Единичная окружность, тождества, преобразования и тригонометрические уравнения

1. Градусы и радианы

Полный оборот:

$$360^\circ = 2\pi \text{ рад.}$$

Полуоборот:

$$180^\circ = \pi \text{ рад.}$$

Перевод градусов в радианы:

$$\alpha_{\text{рад}} = \alpha_{\text{град}} \cdot \frac{\pi}{180^\circ}.$$

Перевод радиан в градусы:

$$\alpha_{\text{град}} = \alpha_{\text{рад}} \cdot \frac{180^\circ}{\pi}.$$

2. Определения тригонометрических функций

На единичной окружности точке, соответствующей углу α , принадлежат координаты

$$(\cos \alpha, \sin \alpha).$$

Тангенс:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \cos \alpha \neq 0.$$

Котангенс:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \sin \alpha \neq 0.$$

3. Основные значения

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	не существует
$\operatorname{ctg} \alpha$	не существует	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

4. Основные тригонометрические тождества

Основное тождество:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Связь тангенса с косинусом:

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad \cos \alpha \neq 0.$$

Связь котангенса с синусом:

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \quad \sin \alpha \neq 0.$$

Связь тангенса и котангенса:

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1,$$

если обе функции определены.

5. Чётность и периодичность

Синус, тангенс и котангенс — нечётные функции:

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha,$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha,$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha.$$

Косинус — чётная функция:

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha.$$

Период синуса и косинуса равен 2π :

$$\sin(\alpha + 2\pi k) = \sin \alpha,$$

$$\cos(\alpha + 2\pi k) = \cos \alpha.$$

Период тангенса и котангенса равен π :

$$\operatorname{tg}(\alpha + \pi k) = \operatorname{tg} \alpha,$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \pi k) = \operatorname{ctg} \alpha, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

6. Знаки функций по четвертям

Четверть	I	II	III	IV
$\sin \alpha$	+	+	–	–
$\cos \alpha$	+	–	–	+
$\operatorname{tg} \alpha$	+	–	+	–
$\operatorname{ctg} \alpha$	+	–	+	–

7. Формулы сложения

Синус суммы:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

Синус разности:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta.$$

Косинус суммы:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

Косинус разности:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

Тангенс суммы:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.$$

Тангенс разности:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.$$

Формулы применяются при допустимых значениях входящих в них выражений.

8. Формулы двойного угла

Синус двойного угла:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

Косинус двойного угла:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.$$

Также:

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1,$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha.$$

Тангенс двойного угла:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha},$$

если обе части формулы определены.

9. Формулы половинного угла

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}.$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}.$$

При извлечении квадратного корня знак выбирают по четверти, в которой находится угол $\frac{\alpha}{2}$:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}.$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}.$$

Тангенс половинного угла:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}.$$

Также:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Формулы применяются при ненулевых знаменателях.

10. Сумма и разность функций

Сумма синусов:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Разность синусов:

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Сумма косинусов:

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Разность косинусов:

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

11. Преобразование произведения в сумму

$$2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta).$$

$$2 \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta).$$

$$2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta).$$

$$2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta).$$

12. Формулы приведения

Если угол содержит

$$\frac{\pi}{2} \pm \alpha \quad \text{или} \quad \frac{3\pi}{2} \pm \alpha,$$

название функции меняется на кофункцию:

$$\sin \longleftrightarrow \cos, \quad \operatorname{tg} \longleftrightarrow \operatorname{ctg}.$$

Если угол содержит

$$\pi \pm \alpha \quad \text{или} \quad 2\pi \pm \alpha,$$

название функции сохраняется.

Знак результата определяется по четверти, в которой расположен исходный угол.

Примеры:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha.$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha.$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha.$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha.$$

$$\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha.$$

$$\operatorname{ctg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha.$$

13. Обратные тригонометрические функции

Арксинус:

$$y = \arcsin x \quad \Longleftrightarrow \quad \sin y = x,$$

$$-1 \leq x \leq 1, \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$$

Арккосинус:

$$y = \arccos x \quad \Longleftrightarrow \quad \cos y = x,$$

$$-1 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq \pi.$$

Арктангенс:

$$y = \operatorname{arctg} x \iff \operatorname{tg} y = x,$$

$$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}.$$

Аркаотангенс:

$$y = \operatorname{arcctg} x \iff \operatorname{ctg} y = x,$$

$$0 < y < \pi.$$

14. Простейшие тригонометрические уравнения

Уравнение

$$\sin x = a$$

имеет действительные решения только при

$$|a| \leq 1.$$

Общее решение:

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Уравнение

$$\cos x = a$$

имеет действительные решения только при

$$|a| \leq 1.$$

Общее решение:

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Уравнение

$$\operatorname{tg} x = a$$

имеет решение:

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Уравнение

$$\operatorname{ctg} x = a$$

имеет решение:

$$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Частные случаи:

$$\sin x = 0 \implies x = \pi n.$$

$$\cos x = 0 \implies x = \frac{\pi}{2} + \pi n.$$

$$\operatorname{tg} x = 0 \implies x = \pi n.$$

$$\operatorname{ctg} x = 0 \implies x = \frac{\pi}{2} + \pi n.$$

15. Универсальная тригонометрическая подстановка

Вводится новая переменная:

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

Тогда:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}.$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2}.$$

Также:

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1-t^2}{2t}.$$

Подстановка применяется для преобразования рациональных выражений от

$$\sin x \text{ и } \cos x$$

в рациональные выражения от переменной t .

При использовании подстановки необходимо отдельно проверять значения

$$x = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

поскольку при них величина $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ не определена.

Перед ответом

Проверь:

- в каких единицах задан угол — градусах или радианах;
- область допустимых значений;
- знаки функций по четвертям;
- период функции;
- все ли найденные решения принадлежат указанному промежутку.

Памятка предназначена для быстрого повторения. Перед применением формулы проверяйте область допустимых значений и единицы измерения углов.

© ФизикусЪ, Денис Лаптев