

# Основні формули планіметрії

Короткий шкільний довідник

Трикутники, чотирикутники, коло, багатокутники та координати

## 1. Кути

Суміжні кути:

$$\alpha + \beta = 180^\circ.$$

Вертикальні кути рівні.

Для паралельних прямих:

- відповідні кути рівні;
- внутрішні різносторонні кути рівні;
- сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює  $180^\circ$ .

## 2. Трикутник

Сума кутів трикутника:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Нерівність трикутника:

$$a + b > c,$$

$$b + c > a,$$

$$c + a > b.$$

Периметр:

$$P = a + b + c.$$

Півпериметр:

$$p = \frac{a + b + c}{2}.$$

## 3. Площа трикутника

Через основу і висоту:

$$S = \frac{1}{2}ah_a.$$

Через дві сторони та кут між ними:

$$S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma.$$

Формула Герона:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Через радіус вписаного кола:

$$S = pr.$$

Через радіус описаного кола:

$$S = \frac{abc}{4R}.$$

Тут  $r$  — радіус вписаного кола,  $R$  — радіус описаного кола.

#### 4. Прямокутний трикутник

**Гіпотенуза** — сторона, що лежить навпроти прямого кута.

**Протилежний катет** — катет, що лежить навпроти розглядуваного кута  $\alpha$ .

**Прилеглий катет** — катет, що прилягає до кута  $\alpha$ .

Якщо  $c$  — гіпотенуза, то за теоремою Піфагора:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Синус кута:

$$\sin \alpha = \frac{\text{протилежний катет}}{\text{гіпотенуза}}.$$

Косинус кута:

$$\cos \alpha = \frac{\text{прилеглий катет}}{\text{гіпотенуза}}.$$

Тангенс кута:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{протилежний катет}}{\text{прилеглий катет}}.$$

Якщо протилежний катет позначено  $a$ , прилеглий катет —  $b$ , а гіпотенузу —  $c$ , то:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}.$$

Висота  $h$ , проведена до гіпотенузи:

$$h = \frac{ab}{c}.$$

Якщо  $m$  і  $n$  — проєкції катетів  $a$  і  $b$  на гіпотенузу, то:

$$a^2 = cm,$$

$$b^2 = cn,$$

$$h^2 = mn.$$

#### 5. Теорема синусів і косинусів

Теорема синусів:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R.$$

Теорема косинусів:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

Аналогічні формули отримують циклічною перестановкою сторін і кутів.

#### 6. Медіана та бісектриса

Медіана до сторони  $a$ :

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

Бісектриса ділить протилежну сторону пропорційно прилеглим сторонам:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}.$$

Довжина бісектриси:

$$l_a = \frac{\sqrt{bc((b+c)^2 - a^2)}}{b+c}.$$

#### 7. Подібність трикутників

Якщо коефіцієнт подібності дорівнює  $k$ , то:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = k.$$

Відношення периметрів:

$$\frac{P_1}{P_2} = k.$$

Відношення площ:

$$\frac{S_1}{S_2} = k^2.$$

## 8. Паралелограм

Периметр:

$$P = 2(a + b).$$

Площа:

$$S = ah_a.$$

Також:

$$S = ab \sin \alpha.$$

Для діагоналей:

$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2).$$

Діагоналі паралелограма ділять одна одну навпіл.

## 9. Прямокутник і квадрат

Прямокутник:

$$S = ab.$$

$$P = 2(a + b).$$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Квадрат:

$$S = a^2.$$

$$P = 4a.$$

$$d = a\sqrt{2}.$$

## 10. Ромб

Периметр:

$$P = 4a.$$

Площа через висоту:

$$S = ah.$$

Площа через сторону і кут:

$$S = a^2 \sin \alpha.$$

Площа через діагоналі:

$$S = \frac{d_1 d_2}{2}.$$

Діагоналі ромба взаємно перпендикулярні та ділять його кути навпіл.

## 11. Трапеція

Середня лінія:

$$m = \frac{a + b}{2}.$$

Площа:

$$S = \frac{a + b}{2} h.$$

Також:

$$S = mh.$$

У рівнобічної трапеції діагоналі рівні, а кути при кожній основі рівні.

## 12. Многокутники

Сума внутрішніх кутів  $n$ -кутника:

$$\Sigma = (n - 2) \cdot 180^\circ.$$

Внутрішній кут правильного  $n$ -кутника:

$$\alpha = \frac{(n - 2)180^\circ}{n}.$$

Кількість діагоналей:

$$N = \frac{n(n - 3)}{2}.$$

Площа правильного многокутника:

$$S = \frac{1}{2}Pr,$$

де  $r$  — радіус вписаного кола, або апофема.

## 13. Коло і круг

Довжина кола:

$$L = 2\pi R = \pi d.$$

Площа круга:

$$S = \pi R^2.$$

Довжина дуги, якщо кут задано в градусах:

$$l = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi R.$$

Якщо кут виражено в радіанах:

$$l = R\alpha.$$

Площа сектора, якщо кут задано в градусах:

$$S_{\text{сект}} = \frac{\alpha}{360^\circ} \pi R^2.$$

Якщо кут виражено в радіанах:

$$S_{\text{сект}} = \frac{1}{2} R^2 \alpha.$$

## 14. Кути в колі

Центральний кут дорівнює градусній мірі дуги, на яку він спирається.

Вписаний кут дорівнює половині градусної міри дуги, на яку він спирається:

$$\angle ACB = \frac{1}{2} \widehat{AB}.$$

Кут між дотичною і хордою дорівнює вписаному куту, що спирається на ту саму дугу.

## 15. Хорди, січні та дотичні

Для хорд, що перетинаються:

$$AM \cdot MB = CM \cdot MD.$$

Для двох січних, проведених з однієї точки:

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD.$$

Для дотичної та січної:

$$PT^2 = PA \cdot PB.$$

Радіус, проведений у точку дотику, перпендикулярний до дотичної.

## 16. Координати на площині

Відстань між точками:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Координати середини відрізка:

$$M \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right).$$

Рівняння прямої:

$$y = kx + b.$$

Рівняння кола з центром  $(a, b)$ :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

**Як обрати формулу площі**

Якщо відомі основа і висота:

$$S = \frac{1}{2}ah.$$

Якщо відомі дві сторони та кут між ними:

$$S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma.$$

Якщо відомі три сторони, використовуйте формулу Герона.

Якщо відомий радіус вписаного кола:

$$S = pr.$$

Якщо відомий радіус описаного кола:

$$S = \frac{abc}{4R}.$$