

# Основные формулы планиметрии

Краткий школьный справочник

Треугольники, четырёхугольники, окружность, многоугольники и координаты

## 1. Углы

Смежные углы:

$$\alpha + \beta = 180^\circ.$$

Вертикальные углы равны.

Для параллельных прямых:

- соответственные углы равны;
- накрест лежащие углы равны;
- сумма односторонних углов равна  $180^\circ$ .

## 2. Треугольник

Сумма углов треугольника:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Неравенство треугольника:

$$a + b > c,$$

$$b + c > a,$$

$$c + a > b.$$

Периметр:

$$P = a + b + c.$$

Полупериметр:

$$p = \frac{a + b + c}{2}.$$

## 3. Площадь треугольника

Через основание и высоту:

$$S = \frac{1}{2}ah_a.$$

Через две стороны и угол между ними:

$$S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma.$$

Формула Герона:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Через радиус вписанной окружности:

$$S = pr.$$

Через радиус описанной окружности:

$$S = \frac{abc}{4R}.$$

Здесь  $r$  — радиус вписанной окружности,  $R$  — радиус описанной окружности.

#### 4. Прямоугольный треугольник

**Гипотенуза** — сторона, лежащая напротив прямого угла.

**Противолежащий катет** — катет, лежащий напротив рассматриваемого угла  $\alpha$ .

**Прилежащий катет** — катет, прилежащий к углу  $\alpha$ .

Если  $c$  — гипотенуза, то по теореме Пифагора:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Синус угла:

$$\sin \alpha = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{гипотенуза}}.$$

Косинус угла:

$$\cos \alpha = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{гипотенуза}}.$$

Тангенс угла:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{прилежащий катет}}.$$

Если противолежащий катет обозначен  $a$ , прилежащий катет —  $b$ , а гипотенуза —  $c$ , то:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}.$$

Высота  $h$ , проведённая к гипотенузе:

$$h = \frac{ab}{c}.$$

Если  $m$  и  $n$  — проекции катетов  $a$  и  $b$  на гипотенузу, то:

$$a^2 = cm,$$

$$b^2 = cn,$$

$$h^2 = mn.$$

#### 5. Теоремы синусов и косинусов

Теорема синусов:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R.$$

Теорема косинусов:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

Аналогичные формулы получают циклической перестановкой сторон и углов.

#### 6. Медиана и биссектриса

Медиана к стороне  $a$ :

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

Биссектриса делит противоположную сторону пропорционально прилежащим сторонам:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}.$$

Длина биссектрисы:

$$l_a = \frac{\sqrt{bc((b+c)^2 - a^2)}}{b+c}.$$

#### 7. Подобие треугольников

Если коэффициент подобия равен  $k$ , то:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = k.$$

Отношение периметров:

$$\frac{P_1}{P_2} = k.$$

Отношение площадей:

$$\frac{S_1}{S_2} = k^2.$$

## 8. Параллелограмм

Периметр:

$$P = 2(a + b).$$

Площадь:

$$S = ah_a.$$

Также:

$$S = ab \sin \alpha.$$

Для диагоналей:

$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2).$$

Диагонали параллелограмма делят друг друга пополам.

## 9. Прямоугольник и квадрат

Прямоугольник:

$$S = ab.$$

$$P = 2(a + b).$$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Квадрат:

$$S = a^2.$$

$$P = 4a.$$

$$d = a\sqrt{2}.$$

## 10. Ромб

Периметр:

$$P = 4a.$$

Площадь через высоту:

$$S = ah.$$

Площадь через сторону и угол:

$$S = a^2 \sin \alpha.$$

Площадь через диагонали:

$$S = \frac{d_1 d_2}{2}.$$

Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят его углы пополам.

## 11. Трапеция

Средняя линия:

$$m = \frac{a + b}{2}.$$

Площадь:

$$S = \frac{a + b}{2} h.$$

Также:

$$S = mh.$$

У равнобедренной трапеции диагонали равны, а углы при каждом основании равны.

## 12. Многоугольники

Сумма внутренних углов  $n$ -угольника:

$$\Sigma = (n - 2) \cdot 180^\circ.$$

Внутренний угол правильного  $n$ -угольника:

$$\alpha = \frac{(n - 2)180^\circ}{n}.$$

Число диагоналей:

$$N = \frac{n(n - 3)}{2}.$$

Площадь правильного многоугольника:

$$S = \frac{1}{2}Pr,$$

где  $r$  — радиус вписанной окружности, или апофема.

## 13. Окружность и круг

Длина окружности:

$$L = 2\pi R = \pi d.$$

Площадь круга:

$$S = \pi R^2.$$

Длина дуги при угле в градусах:

$$l = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi R.$$

Если угол выражен в радианах:

$$l = R\alpha.$$

Площадь сектора при угле в градусах:

$$S_{\text{сект}} = \frac{\alpha}{360^\circ} \pi R^2.$$

Если угол выражен в радианах:

$$S_{\text{сект}} = \frac{1}{2} R^2 \alpha.$$

## 14. Углы в окружности

Центральный угол равен градусной мере дуги, на которую он опирается. Вписанный угол равен половине градусной меры дуги, на которую он опирается:

$$\angle ACB = \frac{1}{2} \widehat{AB}.$$

Угол между касательной и хордой равен вписанному углу, опирающемуся на ту же дугу.

## 15. Хорды, секущие и касательные

Для пересекающихся хорд:

$$AM \cdot MB = CM \cdot MD.$$

Для двух секущих, проведённых из одной точки:

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD.$$

Для касательной и секущей:

$$PT^2 = PA \cdot PB.$$

Радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной.

## 16. Координаты на плоскости

Расстояние между точками:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Координаты середины отрезка:

$$M \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right).$$

Уравнение прямой:

$$y = kx + b.$$

Уравнение окружности с центром  $(a, b)$ :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

### Как выбрать формулу площади

Если известны основание и высота:

$$S = \frac{1}{2}ah.$$

Если известны две стороны и угол между ними:

$$S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma.$$

Если известны три стороны, используйте формулу Герона.

Если известен радиус вписанной окружности:

$$S = pr.$$

Если известен радиус описанной окружности:

$$S = \frac{abc}{4R}.$$