

# Основні формули алгебри

## Короткий шкільний довідник

Степені, корені, тотожності, рівняння, функції, прогресії та логарифми

### 1. Числа, модуль, пропорції та відсотки

Модуль числа:

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

Властивості модуля:

$$|ab| = |a||b|.$$

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}, \quad b \neq 0.$$

Величина  $|a - b|$  — відстань між числами  $a$  і  $b$ .

Пропорція:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc,$$

$$b \neq 0, \quad d \neq 0.$$

Відсотки:

$$p\% = \frac{p}{100}.$$

$$\text{частина} = \text{ціле} \cdot \frac{p}{100}.$$

$$\text{ціле} = \frac{\text{частина}}{p/100}, \quad p \neq 0.$$

### 2. Степені

За допустимих значень змінних:

$$a^m a^n = a^{m+n}.$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad a \neq 0.$$

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

$$(ab)^n = a^n b^n.$$

$$\left( \frac{a}{b} \right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad b \neq 0.$$

Нульовий степінь:

$$a^0 = 1, \quad a \neq 0.$$

Від'ємний степінь:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a \neq 0.$$

Степінь із раціональним показником:

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}, \quad a \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

### 3. Корені

$$(\sqrt{a})^2 = a, \quad a \geq 0.$$

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}, \quad a \geq 0, \quad b \geq 0.$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \quad a \geq 0, \quad b > 0.$$

Для кореня парного степеня підкореневий вираз має бути невід'ємним.

#### 4. Алгебраїчні дроби

За умови, що знаменники не дорівнюють нулю:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}.$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

Під час ділення додатково необхідно, щоб:

$$c \neq 0.$$

Скорочувати можна лише множники:

$$\frac{ab + ac}{a} = \frac{a(b + c)}{a} = b + c, \quad a \neq 0.$$

#### 5. Формули скороченого множення

Квадрат суми:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Квадрат різниці:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Різниця квадратів:

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2.$$

Куб суми:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Куб різниці:

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Сума кубів:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

Різниця кубів:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

#### 6. Лінійне рівняння

Загальний вигляд:

$$ax + b = 0.$$

Якщо  $a \neq 0$ , то:

$$x = -\frac{b}{a}.$$

Якщо

$$a = 0, \quad b = 0,$$

то рівняння має безліч розв'язків.

Якщо

$$a = 0, \quad b \neq 0,$$

то розв'язків немає.

#### 7. Система двох лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

Визначник системи:

$$\Delta = a_1b_2 - a_2b_1.$$

Якщо  $\Delta \neq 0$ , система має єдиний розв'язок:

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{\Delta}.$$

$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{\Delta}.$$

#### 8. Квадратне рівняння

Загальний вигляд:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0.$$

Дискримінант:

$$D = b^2 - 4ac.$$

За умови  $D \geq 0$  корені обчислюють за формулою:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Якщо  $D > 0$ , рівняння має два різні дійсні корені.

Якщо  $D = 0$ , рівняння має один дійсний корінь:

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

Якщо  $D < 0$ , дійсних коренів немає.

## 9. Теорема Вієта

Для квадратного рівняння

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0,$$

корені задовольняють формули:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}.$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Якщо корені  $x_1$  і  $x_2$  існують, то:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

## 10. Квадратична функція

Загальний вигляд:

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0.$$

Абсциса вершини параболи:

$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

Ордината вершини:

$$y_0 = f(x_0) = -\frac{D}{4a}.$$

Вісь симетрії:

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

Якщо  $a > 0$ , гілки параболи напрямлені вгору.

Якщо  $a < 0$ , гілки параболи напрямлені вниз.

## 11. Нерівності

Під час множення або ділення обох частин нерівності на від'ємне число знак нерівності змінюється:

$$a < b, \quad c < 0 \implies ac > bc.$$

Квадратну нерівність зручно розв'язувати методом інтервалів після розкладання виразу на множники:

$$a(x - x_1)(x - x_2) \geq 0.$$

Межами інтервалів є корені виразу.

## 12. Арифметична прогресія

Формула  $n$ -го члена:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d.$$

Сума перших  $n$  членів:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

Також:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n - 1)d).$$

Тут  $d$  — різниця арифметичної прогресії.

## 13. Геометрична прогресія

Формула  $n$ -го члена:

$$b_n = b_1 q^{n-1}.$$

Сума перших  $n$  членів:

$$S_n = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad q \neq 1.$$

Якщо

$$|q| < 1,$$

то сума нескінченної геометричної прогресії:

$$S_\infty = \frac{b_1}{1 - q}.$$

Тут  $q$  — знаменник геометричної прогресії.

## 14. Логарифми

Означення логарифма:

$$\log_a b = c \iff a^c = b,$$

де

$$a > 0, \quad a \neq 1, \quad b > 0.$$

Логарифм добутку:

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y.$$

Логарифм частки:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y.$$

Логарифм степеня:

$$\log_a x^k = k \log_a x.$$

Перехід до нової основи:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a},$$

де

$$c > 0, \quad c \neq 1.$$

Основні значення:

$$\log_a 1 = 0.$$

$$\log_a a = 1.$$

## 15. Основні функції

Лінійна функція:

$$y = kx + b.$$

Обернена пропорційність:

$$y = \frac{k}{x}, \quad x \neq 0.$$

Функція модуля:

$$y = |x|.$$

Функція квадратного кореня:

$$y = \sqrt{x}, \quad x \geq 0.$$

Показникова функція:

$$y = a^x, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$$

Логарифмічна функція:

$$y = \log_a x, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad x > 0.$$

## Перед відповіддю

Перевірте область допустимих значень, знаки, розкриття дужок і підстановку знайдених коренів у вихідну умову.

Пам'ятка призначена для швидкого повторення. Перед застосуванням формули перевіряйте умови її використання та область допустимих значень.

© ФизикусЪ, Денис Лаптев