

Základné vzorce z algebry

Stručný školský prehľad

Mocniny, odmocniny, identity, rovnice, funkcie, postupnosti a logaritmy

1. Čísla, absolútna hodnota, úmera a percentá

Absolútna hodnota čísla:

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

Vlastnosti absolútnej hodnoty:

$$|ab| = |a||b|.$$

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}, \quad b \neq 0.$$

Hodnota $|a - b|$ je vzdialenosť medzi číslami a a b .

Úmera:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc,$$

$$b \neq 0, \quad d \neq 0.$$

Percentá:

$$p\% = \frac{p}{100}.$$

$$\text{časť} = \text{celok} \cdot \frac{p}{100}.$$

$$\text{celok} = \frac{\text{časť}}{p/100}, \quad p \neq 0.$$

2. Mocniny

Pre prípustné hodnoty premenných:

$$a^m a^n = a^{m+n}.$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad a \neq 0.$$

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

$$(ab)^n = a^n b^n.$$

$$\left(\frac{a}{b} \right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad b \neq 0.$$

Nultá mocnina:

$$a^0 = 1, \quad a \neq 0.$$

Mocnina so záporným exponentom:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a \neq 0.$$

Mocnina s racionálnym exponentom:

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}, \quad a \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

3. Odmocniny

$$(\sqrt{a})^2 = a, \quad a \geq 0.$$

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}, \quad a \geq 0, \quad b \geq 0.$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \quad a \geq 0, \quad b > 0.$$

Pri odmocnине párneho stupňa musí byť výraz pod odmocninou nezáporný.

4. Algebraické zlomky

Ak sú všetky menovatele nenulové:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}.$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

Pri delení sa navyše vyžaduje:

$$c \neq 0.$$

Krátiť možno iba činitele:

$$\frac{ab + ac}{a} = \frac{a(b + c)}{a} = b + c, \quad a \neq 0.$$

5. Vzorce skráteneho násobenia

Druhá mocnina súčtu:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Druhá mocnina rozdielu:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Rozdiel druhých mocnín:

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2.$$

Tretia mocnina súčtu:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Tretia mocnina rozdielu:

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Súčet tretích mocnín:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

Rozdiel tretích mocnín:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

6. Lineárna rovnica

Všeobecný tvar:

$$ax + b = 0.$$

Ak $a \neq 0$, potom:

$$x = -\frac{b}{a}.$$

Ak

$$a = 0, \quad b = 0,$$

rovnica má nekonečne veľa riešení.

Ak

$$a = 0, \quad b \neq 0,$$

rovnica nemá riešenie.

7. Sústava dvoch lineárnych rovníc

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

Determinant sústavy:

$$\Delta = a_1b_2 - a_2b_1.$$

Ak $\Delta \neq 0$, sústava má jediné riešenie:

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{\Delta}.$$

$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{\Delta}.$$

8. Kvadratická rovnica

Všeobecný tvar:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0.$$

Diskriminant:

$$D = b^2 - 4ac.$$

Ak $D \geq 0$, korene vypočítame podľa vzorca:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Ak $D > 0$, rovnica má dva rôzne reálne korene.

Ak $D = 0$, rovnica má jeden reálny koreň:

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

Ak $D < 0$, rovnica nemá reálne korene.

9. Vietove vzťahy

Pre kvadratickú rovnicu

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0,$$

platia pre korene vzťahy:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}.$$

$$x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

Ak korene x_1 a x_2 existujú, potom:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

10. Kvadratická funkcia

Všeobecný tvar:

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0.$$

Súradnica x vrcholu paraboly:

$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

Súradnica y vrcholu paraboly:

$$y_0 = f(x_0) = -\frac{D}{4a}.$$

Os súmernosti:

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

Ak $a > 0$, ramená paraboly smerujú nahor.

Ak $a < 0$, ramená paraboly smerujú nadol.

11. Nerovnice

Pri násobení alebo delení oboch strán nerovnice záporným číslom sa znak nerovnosti obráti:

$$a < b, \quad c < 0 \implies ac > bc.$$

Kvadratickú nerovnicu je vhodné riešiť metódou intervalov po rozložení výrazu na súčin činiteľov:

$$a(x - x_1)(x - x_2) \geq 0.$$

Nuly výrazu tvoria hranice intervalov.

12. Aritmetická postupnosť

Vzorec pre n -tý člen:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d.$$

Súčet prvých n členov:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

Ekvivalentne:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n - 1)d).$$

Hodnota d je diferencia aritmetickej postupnosti.

13. Geometrická postupnosť

Vzorec pre n -tý člen:

$$b_n = b_1 q^{n-1}.$$

Súčet prvých n členov:

$$S_n = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad q \neq 1.$$

Ak

$$|q| < 1,$$

súčet nekonečnej geometrickej postupnosti je:

$$S_\infty = \frac{b_1}{1 - q}.$$

Hodnota q je kvocient geometrickej postupnosti.

14. Logaritmy

Definícia logaritmu:

$$\log_a b = c \iff a^c = b,$$

kde

$$a > 0, \quad a \neq 1, \quad b > 0.$$

Logaritmus súčinu:

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y.$$

Logaritmus podielu:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y.$$

Logaritmus mocniny:

$$\log_a x^k = k \log_a x.$$

Prechod na nový základ:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a},$$

kde

$$c > 0, \quad c \neq 1.$$

Základné hodnoty:

$$\log_a 1 = 0.$$

$$\log_a a = 1.$$

15. Základné funkcie

Lineárna funkcia:

$$y = kx + b.$$

Nepriama úmernosť:

$$y = \frac{k}{x}, \quad x \neq 0.$$

Funkcia absolútnej hodnoty:

$$y = |x|.$$

Funkcia druhej odmocniny:

$$y = \sqrt{x}, \quad x \geq 0.$$

Exponenciálna funkcia:

$$y = a^x, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$$

Logaritmická funkcia:

$$y = \log_a x, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad x > 0.$$

Pred odpoveďou

Skontrolujte definičný obor, znamienka, roznásobenie zátvoriek a dosadenie nájdenných koreňov do pôvodnej rovnice.