

Основные формулы алгебры

Краткий школьный справочник

Степени, корни, тождества, уравнения, функции, прогрессии и логарифмы

1. Числа, модуль, пропорции и проценты

Модуль числа:

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

Свойства модуля:

$$|ab| = |a||b|.$$

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}, \quad b \neq 0.$$

Величина $|a - b|$ — расстояние между числами a и b .

Пропорция:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc,$$

$$b \neq 0, \quad d \neq 0.$$

Проценты:

$$p\% = \frac{p}{100}.$$

$$\text{часть} = \text{целое} \cdot \frac{p}{100}.$$

$$\text{целое} = \frac{\text{часть}}{p/100}, \quad p \neq 0.$$

2. Степени

При допустимых значениях переменных:

$$a^m a^n = a^{m+n}.$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad a \neq 0.$$

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

$$(ab)^n = a^n b^n.$$

$$\left(\frac{a}{b} \right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad b \neq 0.$$

Нулевая степень:

$$a^0 = 1, \quad a \neq 0.$$

Отрицательная степень:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a \neq 0.$$

Рациональная степень:

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}, \quad a \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

3. Корни

$$(\sqrt{a})^2 = a, \quad a \geq 0.$$

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}, \quad a \geq 0, \quad b \geq 0.$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \quad a \geq 0, \quad b > 0.$$

Для корня чётной степени подкоренное выражение должно быть неотрицательным.

4. Алгебраические дроби

При ненулевых знаменателях:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}.$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

При делении дополнительно требуется:

$$c \neq 0.$$

Сокращать можно только множители:

$$\frac{ab + ac}{a} = \frac{a(b + c)}{a} = b + c, \quad a \neq 0.$$

5. Формулы сокращённого умножения

Квадрат суммы:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Квадрат разности:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Разность квадратов:

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2.$$

Куб суммы:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Куб разности:

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Сумма кубов:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

Разность кубов:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

6. Линейное уравнение

Общий вид:

$$ax + b = 0.$$

Если $a \neq 0$, то:

$$x = -\frac{b}{a}.$$

Если

$$a = 0, \quad b = 0,$$

то решений бесконечно много.

Если

$$a = 0, \quad b \neq 0,$$

то решений нет.

7. Система двух линейных уравнений

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

Определитель системы:

$$\Delta = a_1b_2 - a_2b_1.$$

Если $\Delta \neq 0$, система имеет единственное решение:

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{\Delta}.$$

$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{\Delta}.$$

8. Квадратное уравнение

Общий вид:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0.$$

Дискриминант:

$$D = b^2 - 4ac.$$

При $D \geq 0$ корни вычисляются по формуле:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Если $D > 0$, уравнение имеет два различных действительных корня.

Если $D = 0$, уравнение имеет один действительный корень:

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

Если $D < 0$, действительных корней нет.

9. Теорема Виета

Для квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0,$$

корни удовлетворяют формулам:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}.$$

$$x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

Если корни x_1 и x_2 существуют, то:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

10. Квадратичная функция

Общий вид:

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0.$$

Абсцисса вершины параболы:

$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

Ордината вершины:

$$y_0 = f(x_0) = -\frac{D}{4a}.$$

Ось симметрии:

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

Если $a > 0$, ветви параболы направлены вверх.

Если $a < 0$, ветви параболы направлены вниз.

11. Неравенства

При умножении или делении обеих частей неравенства на отрицательное число знак неравенства меняется:

$$a < b, \quad c < 0 \implies ac > bc.$$

Квадратное неравенство удобно решать методом интервалов после разложения выражения на множители:

$$a(x - x_1)(x - x_2) \geq 0.$$

Границами интервалов служат корни выражения.

12. Арифметическая прогрессия

Формула n -го члена:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d.$$

Сумма первых n членов:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

Также:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n - 1)d).$$

Здесь d — разность арифметической прогрессии.

13. Геометрическая прогрессия

Формула n -го члена:

$$b_n = b_1 q^{n-1}.$$

Сумма первых n членов:

$$S_n = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad q \neq 1.$$

Если

$$|q| < 1,$$

то сумма бесконечной геометрической прогрессии:

$$S_\infty = \frac{b_1}{1 - q}.$$

Здесь q — знаменатель геометрической прогрессии.

14. Логарифмы

Определение логарифма:

$$\log_a b = c \iff a^c = b,$$

где

$$a > 0, \quad a \neq 1, \quad b > 0.$$

Логарифм произведения:

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y.$$

Логарифм частного:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y.$$

Логарифм степени:

$$\log_a x^k = k \log_a x.$$

Переход к новому основанию:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a},$$

где

$$c > 0, \quad c \neq 1.$$

Основные значения:

$$\log_a 1 = 0.$$

$$\log_a a = 1.$$

15. Базовые функции

Линейная функция:

$$y = kx + b.$$

Обратная пропорциональность:

$$y = \frac{k}{x}, \quad x \neq 0.$$

Функция модуля:

$$y = |x|.$$

Функция квадратного корня:

$$y = \sqrt{x}, \quad x \geq 0.$$

Показательная функция:

$$y = a^x, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$$

Логарифмическая функция:

$$y = \log_a x, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad x > 0.$$

Перед ответом

Проверь область допустимых значений, знаки, раскрытие скобок и подстановку найденных корней в исходное условие.